

ĐÁP ỨNG ĐỘNG LỰC HỌC CỦA DẦM COMPOSITE ĐƯỢC GIA CƯỜNG CÁC ỚNG NANO CÁC BON PHÂN BỐ NGẪU NHIÊN CHỊU TÁC ĐỘNG CỦA LỰC PHÂN BỐ ĐIỀU HÒA

Trần Thị Thom^{1*}, Bùi Văn Tuyên¹

Tóm tắt: Nghiên cứu này tập trung phân tích đáp ứng động lực học của dầm composite chịu tác động của lực phân bố dạng điều hòa. Dầm được chế tạo từ nền polyme gia cường bởi các ống nano cacbon (CNTs) phân bố định hướng ngẫu nhiên. Các tính chất hiệu dụng của dầm được xác định thông qua phương pháp Mori-Tanaka. Biểu thức năng lượng của dầm được xây dựng dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất, với các chuyển vị và góc quay được nội suy bằng hàm dạng Kosmatka. Từ đó, công thức phần tử hữu hạn của dầm được thiết lập và giải bằng phương pháp Newmark. Thông qua các kết quả số, nghiên cứu làm rõ ảnh hưởng của tỉ phần thể tích CNTs và tần số lực kích động đến đáp ứng động lực học của dầm, cụ thể là độ võng trực chuẩn tại giữa dầm, trong hai trường hợp có cản và không cản.

Từ khóa: Phần tử hữu hạn, dầm composite, CNT, lực phân bố điều hòa, lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất.

1. GIỚI THIỆU CHUNG

Các ống nano cacbon (CNTs) sở hữu độ cứng và mô đun đàn hồi vượt trội, cao hơn nhiều so với các vật liệu truyền thống như thép, khiến chúng trở thành lựa chọn lý tưởng để gia cường cho nền polyme. Dầm composite nền polyme gia cường CNTs có tiềm năng ứng dụng rộng rãi trong các kết cấu xây dựng, ngành hàng không vũ trụ, cũng như nhiều lĩnh vực công nghiệp khác như sản xuất ô tô và đóng tàu.

Nhiều nghiên cứu trong và ngoài nước đang được tiến hành để tối ưu hóa quá trình gia cường CNTs trong pha nền. Các nghiên cứu thường giả sử CNTs được phân bố đều hoặc theo dạng chữ (Yas et al., 2012a; Lin et al., 2014), tuy nhiên việc sản xuất composite gia cường CNT theo những dạng này thường khó. Trong nghiên cứu của Shi và cộng sự (2004), CNTs được gia cường vào pha nền có định hướng ngẫu nhiên. Các bài toán về dầm composite này vẫn chưa nhiều, đặc biệt là các nghiên cứu về đáp ứng động lực học của kết cấu dầm này. Theo như hiểu biết của tác giả, Shi và cộng sự (2004) cũng mới chỉ dừng lại ở việc nghiên cứu ảnh hưởng của CNT lên các tính chất hiệu dụng của composite gia cường CNTs. Yas và cộng sự (2012b) đã phân tích động lực học của dầm nano composite gia cường CNTs định hướng ngẫu nhiên chịu tác dụng của lực di động.

Như vậy, đáp ứng động lực học của dầm composite gia cường ống nano cacbon (CNTRC) chịu tác dụng

của lực phân bố điều hòa vẫn chưa được nghiên cứu đầy đủ. Dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất, bài báo này tập trung phân tích đáp ứng động lực học của dầm composite gia cường CNTs phân bố ngẫu nhiên dưới tác động của lực phân bố điều hòa, sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn. Ảnh hưởng của hàm lượng CNTs, thể hiện qua tỉ phần thể tích đến độ võng trực chuẩn tại giữa dầm được khảo sát nhằm đánh giá hiệu quả gia cường CNTs cho kết cấu composite nền polyme. Đồng thời, tác động của tần số lực kích động đến độ võng của dầm cũng được xem xét trong cả hai trường hợp có và không có cản, thông qua các kết quả tính toán số.

2. MÔ HÌNH TOÁN HỌC

Xét một dầm tựa giản đơn với chiều dài L , thiết diện ngang ($b \times h$) chịu tác động của lực phân bố điều hòa. Dầm được làm từ vật liệu composite polyme gia cường CNTs phân bố ngẫu nhiên. Theo Shi và cộng sự (2004), khi CNTs được định hướng hoàn toàn ngẫu nhiên trong pha ma trận, composite là đẳng hướng, mô đun khối và mô đun trượt hiệu dụng của composite được suy ra như sau:

$$K = K_m + \frac{V_{CNT}(\delta_r - 3K_m\alpha_r)}{3(V_m + V_{CNT}\alpha_r)}; \quad G = G_m + \frac{V_{CNT}(\eta_r - 2G_m\beta_r)}{2(V_m + V_{CNT}\beta_r)} \quad (1)$$

$$\text{với } K_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}$$

là mô đun khối và mô đun trượt của pha nền; V_{CNT} , $V_m = 1 - V_{CNT}$ tương ứng là tỉ phần thể tích của pha gia cường (CNTs) và pha nền; $\alpha_r, \delta_r, \beta_r, \eta_r$ được tính như sau:

¹Khoa Cơ khí, Trường Đại học Thủy lợi

* Tác giả liên hệ

$$\alpha_r = \frac{3(K_m + G_m) + k_r - l_r}{3(G_m + k_r)}, \quad \delta_r = \frac{1}{3} \left[n_r + 2l_r + \frac{(2k_r + l_r)(3K_m + 2G_m - l_r)}{G_m + k_r} \right],$$

$$\beta_r = \frac{1}{5} \left(\frac{4G_m + 2k_r + l_r}{3(G_m + k_r)} + \frac{4G_m}{G_m + p_r} + \frac{2[G_m(3K_m + G_m) + G_m(3K_m + 7G_m)]}{G_m(3K_m + G_m) + m_r(3K_m + 7G_m)} \right), \quad (2)$$

$$\eta_r = \frac{1}{5} \left[\frac{2}{3}(n_r - l_r) + \frac{8G_m p_r}{G_m + p_r} + \frac{8m_r G_m(3K_m + 4G_m)}{3K_m(m_r + G_m) + G_m(7m_r + G_m)} + \frac{(2k_r - l_r)(2G_m + l_r)}{3(G_m + k_r)} \right]$$

Trong phương trình (2), các chỉ số dưới “m” và “r” trong ứng chỉ các đại lượng của pha nền và pha gia cường; k_r, l_r, m_r, n_r, p_r là các hằng số đàn hồi của Hill cho pha gia cường.

Mô đun đàn hồi hiệu dụng được tính như sau:

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (3)$$

Trong khi đó mật độ khối lượng hiệu dụng của dầm nhận được từ quy luật phối trộn

$$\rho = (\rho_r - \rho_m)V_{CNT} + \rho_m \quad (4)$$

Dựa trên lý thuyết dầm Timoshenko, các chuyển vị dọc trục và chuyển vị theo phương ngang tại điểm bất

kì của dầm được tính như sau:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z\theta(x, t); \quad w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (5)$$

Trường biến dạng nhận được từ trường chuyển vị

$$\varepsilon_{xx} = u_{0,x} - z\theta_{,x}; \quad \gamma_{xz} = w_{0,x} - \theta \quad (6)$$

Dựa vào định luật Hook, trường ứng suất nhận được

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}; \quad \tau_{xz} = \psi G\gamma_{xz} \quad (7)$$

trong đó ψ là hệ số hiệu chỉnh trượt, được chọn bằng 5/6 đối với dầm có thiết diện hình chữ nhật được xét đến trong bài báo. Năng lượng biến dạng của dầm nhận được như sau:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_{11}u_{0,x}^2 - 2A_{12}u_{0,x}\theta_{,x} + A_{22}\theta_{,x}^2 + \psi A_{33}(w_{0,x} - \theta)^2 \right] dx \quad (8)$$

Các A_{ij} trong (8) là các độ cứng của dầm được định nghĩa

$$(A_{11}, A_{12}, A_{22}) = b \int_{-h/2}^{h/2} E(1, z, z^2) dz, \quad A_{33} = b \int_{-h/2}^{h/2} G dz \quad (9)$$

Động năng của dầm

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_{11}(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) - 2I_{12}\dot{u}_0\dot{\theta} + I_{22}\dot{\theta}^2 \right] dx \quad (10)$$

với I_{ij} là các mô men khối lượng, được định nghĩa

$$(I_{11}, I_{12}, I_{22}) = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2) dz \quad (11)$$

Công của ngoại lực được tính theo

$$W = \int_0^L q w dx \quad (12)$$

với $q = q_0 \cos(\Omega t)$ là lực phân bố điều hòa tác dụng lên dầm.

3. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Bài báo này sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để tính đáp ứng động lực học cho dầm. Giả sử dầm được chia thành các phần tử dầm hai nút với chiều dài phần tử là l . Vectơ chuyển vị nút cho phần tử gồm sáu thành phần như sau:

$$\mathbf{d} = \{u_i, w_i, \theta_i, u_j, w_j, \theta_j\}^T \quad (13)$$

Các chuyển vị và góc quay được nội suy qua các giá trị nút như sau:

$$u_0 = \mathbf{N}_u \mathbf{d}, \quad w_0 = \mathbf{N}_w \mathbf{d}, \quad \theta = \mathbf{N}_\theta \mathbf{d} \quad (14)$$

trong đó $\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_w, \mathbf{N}_\theta$ tương ứng là các ma trận hàm dạng cho chuyển vị dọc trục, chuyển vị ngang và góc quay. Các hàm dạng tuyến tính được sử dụng để nội suy cho chuyển vị dọc trục, các hàm dạng Kosmatka được sử dụng để nội suy cho chuyển vị ngang và góc quay. Sử dụng trường nội suy trong công thức (14), năng lượng biến dạng của dầm được viết dưới dạng công thức phần tử hữu hạn như sau:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ne} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} \quad ; \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_{uu} + \mathbf{k}_{u\theta} + \mathbf{k}_{\theta\theta} + \mathbf{k}_{\gamma\gamma} \quad (15)$$

trong đó ne là số phần tử dùng để rời rạc dầm; và

$$\mathbf{k}_{uu} = \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{N}_{u,\xi}^T A_{11} \mathbf{N}_{u,\xi} d\xi; \quad \mathbf{k}_{u\theta} = -\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{N}_{u,\xi}^T A_{12} \mathbf{N}_{\theta,\xi} d\xi; \quad (16)$$

$$\mathbf{k}_{\theta\theta} = \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{N}_{\theta,\xi}^T A_{22} \mathbf{N}_{\theta,\xi} d\xi; \quad \mathbf{k}_{\gamma\gamma} = \int_0^1 (\mathbf{N}_{w,\xi}^T - l \mathbf{N}_{\theta}^T) \psi A_{33} (\mathbf{N}_{w,\xi} - l \mathbf{N}_{\theta}) d\xi$$

với $\xi = x/l$ là tọa độ tự nhiên. Tương tự, động năng của dầm được viết lại

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ne} \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{d}} \quad ; \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_{uu} + \mathbf{m}_{ww} + \mathbf{m}_{u\theta} + \mathbf{m}_{\theta\theta} \quad (17)$$

với

$$\mathbf{m}_{uu} = l \int_0^1 \mathbf{N}_u^T I_{11} \mathbf{N}_u d\xi; \quad \mathbf{m}_{uu} = l \int_0^1 \mathbf{N}_w^T I_{11} \mathbf{N}_w d\xi; \quad (18)$$

$$\mathbf{m}_{u\theta} = -l \int_0^1 \mathbf{N}_u^T I_{12} \mathbf{N}_{\theta} d\xi; \quad \mathbf{m}_{\theta\theta} = l \int_0^1 \mathbf{N}_{\theta}^T I_{22} \mathbf{N}_{\theta} d\xi$$

Công của ngoại lực cũng được viết lại

$$W = \sum_{ne} \mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (19)$$

trong đó \mathbf{f} là véc tơ lực nút phân tử

$$\mathbf{f} = \int_0^1 l q \mathbf{N}_w d\xi \quad (20)$$

Sử dụng các ma trận độ cứng, khối lượng và lực nút phân tử trên ta có thể viết được phương trình chuyển động cho dầm dưới dạng

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{F}^{\text{ex}}(t) \quad (21)$$

Trong (21), \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} tương ứng là ma trận khối lượng, ma trận cản và ma trận độ cứng tổng thể của dầm, $\mathbf{F}^{\text{ex}}(t)$ là véc-tơ tải trọng nút tổng thể. Căn Reyleigh được sử dụng trong bài báo để thiết lập ma trận cản tổng thể của dầm:

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K} \quad (22)$$

trong đó

$$a = \frac{2\omega_i\omega_j(\xi_i\omega_j - \xi_j\omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2}; \quad b = \frac{2(\xi_j\omega_j - \xi_i\omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (23)$$

với ξ_i, ξ_j là các tỉ số cản tương ứng với hai tần số tự nhiên bất kì của dầm, ω_i, ω_j . Trong bài báo này ma trận cản của dầm nhận được với tỉ số cản $\xi_1 = \xi_2 = 0.05$ ứng với hai tần số tự nhiên đầu tiên ω_1, ω_2 .

Để tính toán đáp ứng động lực học của dầm chịu lực phân bố đều dạng điều hòa biến thiên theo thời gian bằng cách giải phương trình (21), bài báo áp dụng phương pháp gia tốc trung bình - một thuật toán ẩn thuộc họ phương pháp tích phân trực tiếp Newmark, với ổn định vô điều kiện (Newmark, 1959).

4. KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

Dầm được xét đến có các kích thước hình học: $L/h = 20$, $b = 0.4\text{m}$, $h = 1\text{m}$. Nền polyme được làm từ PMMA, CNTs đơn vách (10,10) được sử dụng để gia cường. Tính chất vật liệu của hai pha này được lấy như sau: $\rho_m = 1190 \text{ kg/m}^3$; $E_m = 2.5 \text{ GPa}$; $\nu = 0.34$; $\rho_r = 1400 \text{ kg/m}^3$; các mô đun đàn hồi của Hill được cho trong Bảng 1. Dầm chịu tác dụng của lực phân bố điều hòa $q = q_0 \cos(\Omega t)$ với $q_0 = 1 \text{ KN/m}$. Để thuận tiện cho việc tính toán, độ võng trục chuẩn tại giữa dầm được tính $W^* = W/h$, trong đó W là độ võng tại giữa dầm.

Bảng 1. Các hệ số đàn hồi của Hill (Thom et al., 2025)

CNT radius (A°)	k_r (GPa)	l_r (GPa)	m_r (GPa)	n_r (GPa)	p_r (GPa)
10	30	10	1	450	1

4.1. Kiểm nghiệm mô hình phân tử và chương trình số

Bảng 2 trình bày kết quả kiểm tra sự hội tụ của mô hình phân tử hữu hạn trong việc xác định tham số tần số cơ bản của dầm CNTRC có CNTs phân bố ngẫu nhiên. Để so sánh, bảng cũng bao gồm các giá trị tham khảo từ tài liệu của Yas và cộng sự (2012b), trong đó

các thông số đầu vào và tham số tần số được lấy giống hệt như trong nghiên cứu này. Kết quả cho thấy mô hình phân tử hữu hạn được xây dựng trong bài báo có tốc độ hội tụ khá nhanh. Cụ thể, đối với dầm tựa giản đơn (SS), cần 14 phần tử dầm rời rạc để đạt hội tụ tham số tần số cơ bản, trong khi với dầm một đầu ngàm, một đầu tự do (CF), chỉ cần 6 phần tử đã đạt được hội tụ.

Ngược lại, nghiên cứu của Yas và cộng sự (2012b) phải sử dụng tới 100 phần tử để xác định được tham số tần số. Ngoài ra, kết quả từ Bảng 2 cũng cho thấy giá

trị tham số tần số cơ bản thu được trong nghiên cứu này có độ sai lệch rất nhỏ so với tài liệu tham khảo, và sai số này nằm trong giới hạn chấp nhận được.

Bảng 2. Sự hội tụ của mô hình PTHH trong đánh giá tham số tần số cơ bản của dầm CNTRC với CNTs phân bố ngẫu nhiên

Điều kiện biên	Bài báo					Yas et al., 2012b	Sai số (%)
	ne=2	ne=6	ne=10	ne=14	ne=20		
CF	2.0575	2.0569	2.0569	2.0569	2.0569	2.151246	4.59%
SS	3.4501	3.4425	3.4424	3.4423	3.4423	3.574603	3.84%

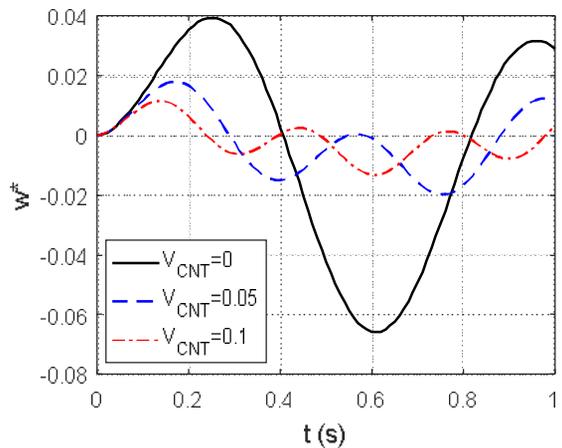
Bảng 3. So sánh độ võng tĩnh lớn nhất tại giữa dầm của dầm thuần nhất

Điều kiện biên	Bài báo	Nghiệm giải tích	Sai số (%)
CC	0.0052	$0.0050 \left(\frac{q_0 L^4}{384EI} \right)$	4%
SS	0.0252	$0.0250 \left(\frac{5q_0 L^4}{384EI} \right)$	0.8%

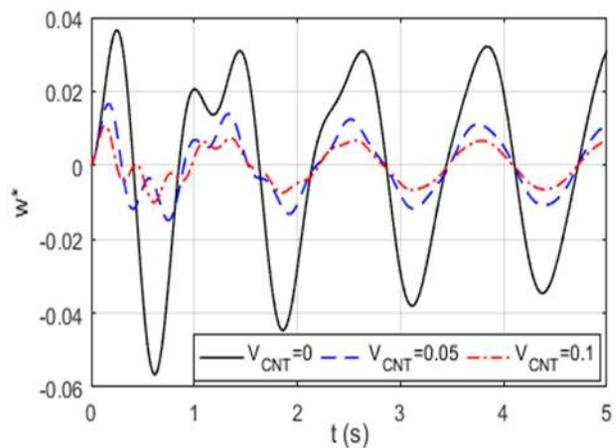
Bảng 3 so sánh độ võng tĩnh lớn nhất tại giữa dầm nhận được từ bài báo so với nghiệm giải tích bằng cách cho $\Omega = 0$. Từ Bảng 3 cho thấy rằng độ võng tĩnh nhận được từ bài báo khá sát với nghiệm giải tích. Qua các so sánh trong Bảng 2 và Bảng 3 ta có thể khẳng định chương trình tính toán được xây dựng là phù hợp và có độ tin cậy cao. Đồng thời lưới 14 phần tử sẽ được sử dụng để tính toán, phân tích các kết quả của bài báo.

4.2. Kết quả số và thảo luận

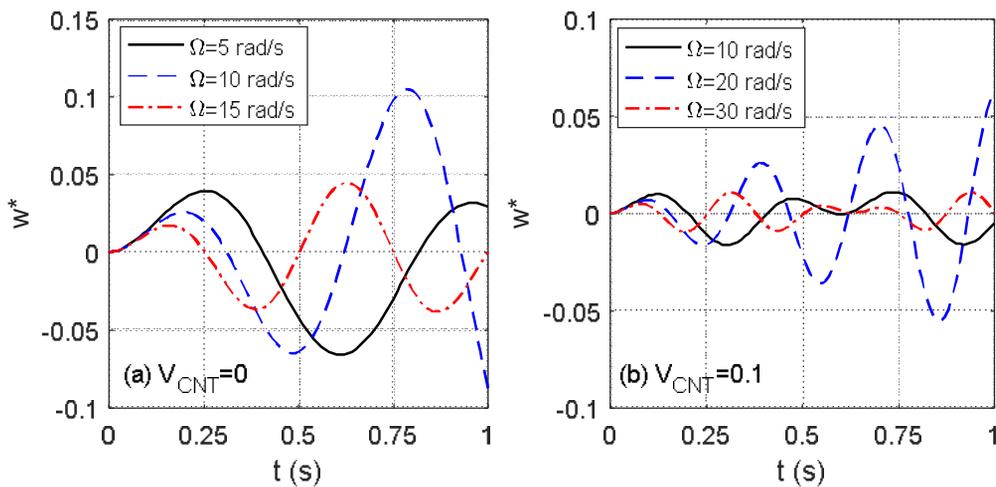
Hình 1 thể hiện sự thay đổi độ võng trục chuẩn tại giữa dầm theo thời gian trong trường hợp bỏ qua cản, với tần số lực kích động $\Omega = 5 \text{ rad/s}$ và các tỉ phần thể tích CNTs khác nhau. Có thể quan sát thấy rằng khi tỉ phần thể tích CNTs tăng từ $V_{\text{CNT}} = 0$ đến $V_{\text{CNT}} = 0.1$, số chu kỳ dao động tăng và biên độ dao động của dầm giảm rõ rệt. Điều này cho thấy việc gia cường CNTs giúp tăng độ cứng kết cấu, từ đó làm giảm độ võng và biên độ dao động. Ngoài ra, trong trường hợp không có CNTs, dao động của dầm duy trì biên độ lớn và ổn định theo thời gian, thể hiện rõ đặc trưng của hệ không có cản. Hình 2 mô tả kết quả tương tự nhưng có xét đến cản. Trong trường hợp này, dao động của dầm giảm biên độ theo thời gian do tác động của lực cản. Tốc độ suy giảm biên độ tăng lên khi hàm lượng CNTs cao hơn, điều này xuất phát từ việc kết hợp giữa tăng độ cứng vật liệu và tiêu tán năng lượng do cản. So với Hình 1, dao động ở Hình 2 nhanh chóng ổn định về trạng thái gần như tĩnh sau một khoảng thời gian ngắn, đặc biệt đối với $V_{\text{CNT}} = 0.1$. Tổng thể, cả hai hình đều khẳng định rằng việc gia cường CNTs vào nền polyme mang lại hiệu quả rõ rệt trong việc giảm độ võng và kiểm soát dao động của dầm composite. Sự khác biệt giữa hai hình cho thấy yếu tố cản đóng vai trò quan trọng trong việc tiêu tán năng lượng dao động, đặc biệt khi kết hợp với độ cứng gia tăng từ CNTs.



Hình 1. Độ võng trục chuẩn tại giữa dầm theo thời gian với $\Omega = 5 \text{ rad/s}$ và các giá trị khác nhau của tỉ phần thể tích CNTs (bỏ qua cản)



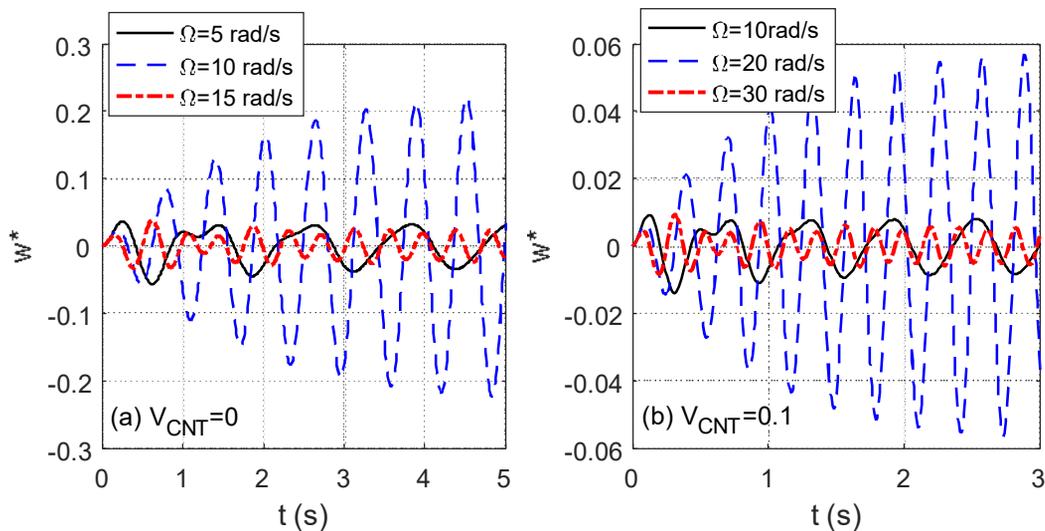
Hình 2. Độ võng trục chuẩn tại giữa dầm theo thời gian với $\Omega = 5 \text{ rad/s}$ và các giá trị khác nhau của tỉ phần thể tích CNTs (có tính đến cản)



Hình 3. Độ võng trực chuẩn tại giữa dầm theo thời gian với các giá trị khác nhau của tỉ phần thể tích CNTs và tần số lực kích động (bỏ qua cản)

Hình 3 chỉ ra sự thay đổi của độ võng trực chuẩn tại giữa dầm vào tần số của lực kích động. Từ hình vẽ ta thấy rằng độ võng phụ thuộc mạnh vào tần số của lực kích động. Cụ thể, với Hình 3a, $V_{CNT} = 0$, tần số tự nhiên thứ nhất của dầm $\omega_1 = 10.279$ rad/s, ta thấy rằng khi tăng tần số của lực kích động đến gần tần số tự nhiên của dầm, biên độ dao động tăng mạnh, điều này được giải thích là do có sự cộng hưởng giữa tần số tự nhiên của dầm và tần số của lực kích động. Khi tăng

giá trị của tần số của lực kích động lớn hơn tần số tự nhiên của dầm, biên độ dao động sẽ giảm đi. Điều này cũng được nhìn thấy rõ trong Hình 3b. Khi tỉ phần thể tích CNTs tăng lên đồng nghĩa với việc độ cứng của dầm tăng lên dẫn đến tần số tự nhiên của dầm cũng tăng. Cụ thể khi $V_{CNT} = 0.1$ tần số tự nhiên thứ nhất của dầm $\omega_1 = 20.5321$ rad/s, như được chỉ ra trong hình 3b, khi tần số của lực kích động sát với tần số riêng của dầm, biên độ dao động tăng mạnh.



Hình 4. Độ võng trực chuẩn tại giữa dầm theo thời gian với các giá trị khác nhau của tỉ phần thể tích CNTs và tần số lực kích động (có tính đến cản)

Trong trường hợp có cản (Hình 4) ta cũng thấy rằng khi tần số của lực kích động sát với tần số tự nhiên của dầm, biên độ dao động tăng cực mạnh. Từ Hình 3 và 4, một lần nữa ta thấy rằng trong cả hai trường hợp có cản và không có cản, biên độ dao động của độ võng trực chuẩn tại giữa dầm giảm rõ nét khi tăng tỉ phần thể tích CNTs.

5. KẾT LUẬN

Bài báo nghiên cứu dao động cưỡng bức của dầm

CNTRC chịu tác động của lực phân bố điều hòa, cụ thể là nghiên cứu ảnh hưởng của các tham số đầu vào quan trọng như tỉ phần thể tích CNTs, tần số của lực kích động lên độ võng trực chuẩn tại giữa dầm trong cả hai trường hợp có tính đến cản và bỏ qua cản. Từ các kết quả số ta thấy khi tăng tỉ phần thể tích CNTs, dầm thực hiện nhiều chu trình dao động hơn đồng thời biên độ của độ võng trực chuẩn tại giữa dầm theo thời gian

giảm đi rõ nét. Điều này cho thấy hiệu quả của việc gia cường CNTs. Đồng thời từ kết quả số ta cũng thấy được ảnh hưởng của tần số lực kích động lên dao động cưỡng bức của dầm. Khi tần số của lực cưỡng bức tăng đến sát tần số tự nhiên của dầm, biên độ dao động tăng mạnh, điều này gây ra bởi hiện tượng cộng hưởng giữa

hai dao động. Khi bỏ qua cản, dao động của dầm là sự giao thoa giữa dao động tự do của dầm và dao động gây ra bởi lực cưỡng bức. Khi có tính đến cản, dao động tự do của dầm suy giảm theo thời gian, chỉ còn lại dao động cưỡng bức, dầm dao động điều hòa theo biên độ ổn định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Yas M. H. and Samadi N. (2012a), "Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation", *Int. J. Pressure Vessels Pip.*, 98, pp. 119-128.
- Lin F. and Xiang, Y. (2014), "Vibration of carbon nanotube reinforced composite beams based on the first and third order beam theories", *Appl. Math. Model.*, 38(15-16), pp. 3741-3754.
- Shi D. L., Feng X. Q., Huang Y. Y., Hwang K. C. and Gao H. (2004), "The effect of nanotube waviness and agglomeration on the elastic property of carbon nanotube-reinforced composites", *J. Eng. Mater. Technol.*, 126(3), pp. 250-257.
- Yas M. H. and Heshmati M. (2012b), "Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite beams reinforced by randomly oriented carbon nanotube under the action of moving load", *Appl. Math. Model.*, 36(4), pp. 1371-1394.
- Newmark N.M. (1959), "A method of computation for structural dynamics". *J. Eng. Mech. Division*, 85(EM3), pp. 67-94.
- Tran T.T. and Nguyen D.K. (2025). "Thermoelastic transient response to a moving mass of inclined composite microbeams reinforced by carbon nanotubes with agglomeration effect", *J. Vib. Eng. & Technol.*, 13(376).

Abstract:

DYNAMIC RESPONSE OF COMPOSITE BEAMS REINFORCED WITH RANDOMLY DISTRIBUTED CARBON NANOTUBE SUBJECTED TO HARMONICALLY DISTRIBUTED FORCES

This study presents the dynamic response of a composite beam subjected to a harmonically distributed force. The beam considered in the study is made of a polymer matrix reinforced with randomly oriented carbon nanotubes. The effective properties of the beam are obtained by the Mori-Tanaka approach. The energy expressions for the beam are based on the first-order shear deformation theory. Based on Kosmatka shape functions for interpolation of displacements and rotations, the finite element formulation for the beam is established and solved with the aid of the Newmark method. The effects of CNTs volume fraction and excitation force frequency on the dynamic response of the beam, specifically on the dimensionless mid-span transverse displacement in the two cases with and without damping are clarified through numerical results.

Keywords: Finite element, composite beam, CNT, harmonic force distribution, first-order shear deformation theory.

Ngày nhận bài: 15/8/2025

Ngày chấp nhận đăng: 10/11/2025